DRŽAVNO NATJECANJE IZ LOGIKE

Našice, 23.-25. travnja 2015.

BODOVI:

- POTPUNO ISPRAVNO RJEŠENJE: 3 BODA
- IZOSTANAK RJEŠENJA: 1 BOD
- KRIVO ILI NEPOTPUNO RJEŠENJE: 0 BODOVA

NAPOMENA: Zadatak 2 boduje se na sljedeći način:

- POTPUNO ISPRAVNO RJEŠENJE: 6 BODOVA
- IZOSTANAK RJEŠENJA: 1 BOD
- KRIVO ILI NEPOTPUNO RJEŠENJE: 0 BODOVA

ZADATAK	BROJ BODOVA	MAX BODOVA
1.		18
2.		24
3.		30
4.		21
5.		24
6.		84
7.		48
UKUPNO		**249**

Vrijeme rješavanja testa: 120 minuta

Zadatak 1.

a) Zapišite sljedeće rečenice u jeziku logike predikata s identitetom koristeći sljedeće predikate:

- Jx: 'x je jednorog'
- Rxy: 'jednorogu x pripada rog y'
- $x = y$: 'x je istovjetan y'

1. Postoji barem jedan jednorog. ______________________________
2. Postoji točno jedan jednorog. ______________________________
3. Postoje najviše dva jednoroga. ______________________________
4. Postoje točno tri jednoroga. ______________________________
5. Svaki jednorog ima točno jedan rog.______________________________

b) Navedite formule iz zadatka **a)** koje tvore najveći zadovoljiv skup (zadovoljiv skup obuhvaća iskaze koji mogu biti istovremeno istiniti). Napišite njihove brojeve na crtu. ____________________

(6×3 boda = 18 bodova)

Zadatak 2.

Odredite jesu li zaključci valjani (zaokružite točan odgovor). Ako zaključak nije valjan, navedite protuprimjer.

Napomena: Protuprimjer oblikujte na način da odredite imenovani sadržaj predmetnoga područja (domene) te navedete značenja predikata. Na primjer, domena: ljudi, predikat: Fxy: 'x voli y'.

1. $\dfrac{\forall x(Fx \lor Gx)}{\forall xFx \lor \forall xGx}$ DA / NE

Protuprimjer (po potrebi):

2. $\dfrac{\exists x\forall y(Rxy \leftrightarrow \exists zSzy)}{\forall x(\exists yRyx \leftrightarrow \exists ySyx)}$ DA / NE

Protuprimjer (po potrebi):

3. $\dfrac{\exists xPx \lor \neg\exists xPx}{\exists x(Px \to \forall yPy)}$ DA / NE

Protuprimjer (po potrebi):

4. $\dfrac{\forall x\exists yRxy}{\exists y\forall xRxy}$ DA / NE

Protuprimjer (po potrebi):

Napomena: odgovori 'NE' priznaju se ako i samo ako je naveden odgovarajući protuprimjer. **Svaki točan odgovor zajedno s odgovarajućim protuprimjerom (ako je potreban) donosi 6 bodova.**

(4×6 bodova = 24 boda)

Zadatak 3.

U nekoj se školi predaju ukupno tri predmeta i to prema nastavnome sadržaju iz Hogwartsa: aritmancija, preobrazba te travarstvo. Svaki su dan na raspolaganju četiri moguća termina, a nastava se održava od ponedjeljka do petka. U svakome se terminu održava najviše jedan od navedenih predmeta, a svaki se predmet održava barem u jednome od ukupno 20 dostupnih nastavnih termina.

Predmetno područje (domenu) čine svi dostupni nastavni termini.

Predikati:

- Ax: 'termin x zauzima aritmancija'
- Px: 'termin x zauzma preobrazba'
- Tx: 'termin x zauzima travarstvo'
- Ixy: 'termini x i y pripadaju istomu danu'
- $Sxyz$: 'termini x, y i z pripadaju istomu danu te y neposredno slijedi iza x, a z iza y'

Na praznu crtu desno od rečenice upišite 'I' ako rečenica slijedi iz opisa, 'N' ako iz opisa slijedi njezina negacija, a u ostalim slučajevima upišite 'M'.

1. $\forall x Ax$ _____
2. $\forall x Ax \to \exists x Tx$ _____
3. $\forall x(Ax \leftrightarrow \forall y(Ixy \leftrightarrow Ay))$ _____
4. $\exists x((\exists y \exists z Sxyz \lor \exists y \exists z Syzx) \land Tx)$ _____
5. $\exists x \exists y \exists z \exists w(Sxyz \land Syzw \land Ax \land Py \land Tz \land \neg(Aw \lor Pw \lor Tw))$ _____
6. $\forall x(\exists y \exists z Sxyz \to \forall y Ixy)$ _____
7. $\exists x Tx \to \forall x(Px \to \exists y Ay)$ _____
8. $\neg \exists x Tx \to \neg \forall x(Px \to \neg \exists y Ay)$ _____
9. $\exists x \exists y \exists z(\neg Ixy \land \neg Ixz \land \neg Iyz \land Ax \land Ty \land Pz)$ _____
10. $\forall x \forall y(Ixy \to ((Ax \land Ay) \lor (Tx \land Ty) \lor (Px \land Py)))$ _____

(10×3 boda = 30 bodova)

Zadatak 4.

Formula je u **konjunktivnoj normalnoj formi (KNF)** ako je ona konjunkcija jedne ili više disjunkcija. Konjunkti tih konjunkcija mogu biti samo jednostavni iskazi ili negacije jednostavnih iskaza povezani veznikom disjunkcije. Na primjer:

$$\neg A \wedge (B \vee C)$$
$$A \vee B$$
$$A \wedge (B \vee B) \wedge (B \vee \neg C)$$
$$C$$

Napomena: Ovdje iznimno i jedan jedini konjunkt shvaćamo kao (jednočlanu) konjunkciju, a jedan jedini disjunkt kao (jednočlanu) disjunkciju.

a) Možemo li za svaku formulu iskazne logike naći ekvivalentnu formulu u KNF? DA / NE

Metoda rezolucije koristi se za utvrđivanje je li skup formula iskazne ili predikatne logike zadovoljiv. Primjenjuje se na formule koje su u KNF. Sastoji se od sljedećih koraka:

1. Svaku formula zamijenimo ekvivalentnom formulom u KNF.
2. Svaku formulu koja sadrži veznik konjunkcije izbacimo iz skupa te u skup dodamo sve njezine konjunkte kao zasebne formule.
   Na primjer, formulu $(A \vee B) \wedge (B \vee C)$ rastavimo na dvije formule $(A \vee B)$ i $(B \vee C)$.
3. Odaberemo dvije formule iz skupa tako da jedna od njih sadrži disjunkt P (gdje je P bilo koji jednostavni iskaz), a druga formula sadrži disjunkt $\neg P$. U skup dodajemo novu formulu koja čini disjunkciju dviju odabranih formula, ali tako da je iz prve formule izbačena svaka pojava disjunkta P, a iz druge svaka pojava disjunkta $\neg P$. Ako se formula koju dodajemo ili njoj ekvivalentna formula već nalazi u skupu, ne dodaje se ponovno. Prilikom jedne primjene ovoga koraka može se dobiti najviše jedna nova formula. Na primjer, ako se u skupu nalaze formule $A \vee B$ i $\neg B \vee C$, nakon primjene ovoga koraka u skupu će se nalaziti formule $A \vee B$, $\neg B \vee C$ i $A \vee C$.
4. Prethodni korak primjenjujemo dokle god možemo, ali svaki put na par formula kojim ćemo dobiti formulu koja već nije u skupu.
   Ako se u nekome trenutku pojavila prazna formula (formula koja ne sadrži nijedan jednostavni iskaz), skup je nezadovoljiv (pretpostavimo da je prazna formula ekvivalentna s $P \wedge \neg P$). Ako više ne možemo dodavati nove formule i nismo dobili praznu formulu, zaključujemo da je skup zadovoljiv.

b) Pretpostavimo da je početni skup formula zadovoljiv. Hoće li biti zadovoljiv i nakon primjene prva dva koraka te proizvoljnoga broja primjena trećega koraka? DA / NE

c) Zadan je sljedeći zaključak:

$$\begin{array}{c} P \leftrightarrow Q \\ \neg Q \\ \hline \neg P \end{array}$$

Provjerite valjanost zaključka metodom rezolucije slijedeći korake ispod.

1. Napišite kako glase premise zaključka nakon primjene prvoga koraka. Neka formule sadrže najmanji mogući broj znakova.

   1. ______________________________
   2. ______________________________
   3. P

2. Napišite dobivene formule nakon primjene drugoga koraka.

   1. ______________________________
   2. ______________________________
   3. ______________________________
   4. P

3. **Dva puta** primijenite treći korak. Odabiri formula moraju biti takvi da biste prema ranijim pravilima mogli završiti postupak.

1. primjena. Izabrane formule:

   1. ______________________________
   2. ______________________________

Formule u skupu nakon primjene: ____

2. primjena. Izabrane formule:

   1. ______________________________
   2. ______________________________

Postupak se prekida.

4. Je li dani zaključak valjan? DA / NE
Odgovor na pitanje 4. priznaje se ako i samo ako je postupak provjere ispravno proveden.

(7×3 boda = 21 bod)

Zadatak 5.

Dva igrača, A i B, igraju igru '$Tau_{\leftrightarrow}$'. Igra se sastoji od slaganja logičkih formula i u njoj može biti odigrano najviše sto poteza. Svaki igrač povlači po jedan potez. Igrač A igra samo neparne poteze (1., 3., ...), a igrač B igra samo parne poteze. Pravila su sljedeća:

- U prvome potezu igrač A bira formulu P ili $\neg P$. Ta je odabrana formula rezultantna formula prvoga poteza (F).
- U svakome idućem potezu sve do stotoga poteza (uključno) igrač koji je na potezu uzima rezultantnu formulu prethodnoga poteza F te ponovno bira između formula P i $\neg P$; označimo igračev odabir s G. Rezultantna je formula toga poteza formula dobivena povezivanjem F i G veznikom ekvivalencije. Dakle, ako je rezultantna formula prvoga poteza F, rezultantna je formula drugoga poteza $(F) \leftrightarrow G$.
- Igrač je pobijedio ako i samo ako je rezultantna formula njegova poteza tautologija. U tom se potezu igra prekida.
- Igrač je izgubio ako i samo ako je igra prekinuta, a on nije pobijedio.
- Ako je povučen stoti potez i igra još nije prekinuta, prekida se.

a) Zaokružite točan odgovor:

$((\neg P) \leftrightarrow P) \leftrightarrow \neg P$ moguća je rezultantna formula nekoga poteza neke igre '$Tau_{\leftrightarrow}$'. DA / NE

b) Napišite sve ishode koje igra '$Tau_{\leftrightarrow}$' može imati u obliku uređenoga para (a,b), gdje je a broj igrača koji su pobijedili, a b broj igrača koji su izgubili. Na primjer, ako smatrate da u svakoj igri ili nitko ne pobijedi i ne izgubi, ili jedan igrač izgubi i oba pobjede, tada je rješenje: (0, 0), (2, 1).

Rješenje: ____________________________

c) Neka je igra 'Tau_*' varijanta igre '$Tau_\leftrightarrow$' u kojoj se umjesto veznika ekvivalencije koristi veznik $*$, gdje je $*$ jedan od veznika iz skupa $\{\vee, \wedge, \rightarrow\}$. Na primjer, '$Tau_\vee$' jest varijanta igre '$Tau_\leftrightarrow$' u kojoj se rezultantne formule nakon prvoga poteza tvore s pomoću veznika $\vee$.

Odgovorite na sljedeća pitanja:

1. U nekoj mogućoj igri '$Tau_\leftrightarrow$' igrač A je pobjednik. DA / NE
   Ako ste odgovorili 'DA', navedite moguću rezultantnu formulu završnoga poteza takve igre. Ako ste odgovorili 'NE', navedite sve varijante igre 'Tau_*' u kojima je to moguće.

   Odgovor:______________________________

2. U nekoj mogućoj igri '$Tau_\leftrightarrow$' igrač B je pobjednik. DA / NE
   Ako ste odgovorili 'DA', navedite moguću rezultantnu formulu završnoga poteza takve igre. Ako ste odgovorili 'NE', navedite sve varijante igre 'Tau_*' u kojima je to moguće.

   Odgovor:______________________________

3. Neka moguća igra '$Tau_\leftrightarrow$' završava u stotome potezu bez pobjednika. DA / NE
   Ako ste odgovorili 'DA', navedite rezultantnu formulu desetoga poteza jedne takve igre. Ako ste odgovorili 'NE', navedite sve varijante igre 'Tau_*' u kojima je to moguće.

   Odgovor:

4. Navedite varijantu igre 'Tau_*' u kojoj će svaka igra završiti bez pobjednika nakon točno sto poteza.

   Odgovor:______________________________

5. Postoji li varijanta igre 'Tau_*' koja nužno završava do trećega poteza? DA / NE
   Ako ste odgovorili 'DA', navedite varijantu i primjer takve igre.

   Odgovor:______________________________

6. Navedite sve varijante igre 'Tau_*' u kojima je skup ishoda isti kao onaj iz podzadatka **b)**.

   Odgovor:______________________________

(8×3 boda = 24 boda)

Zadatak 6.

Minolovac (engl. *Minesweeper*) računalna je igra u kojoj je cilj očistiti minsko polje bez aktiviranja mine. Ono je kvadratnog oblika (u našem slučaju 9×9 polja, ali može biti i veće). Svako se polje može otvoriti tako da se na njega klikne. Ako se klikne na polje koje sadrži minu, igra je završena i igrač je izgubio. Ako polje ne sadrži minu, pojavit će se broj između 0 i 8 ukazujući na broj mina koje se nalaze na susjednim poljima uključujući i dijagonalno susjedna polja (na jednome polju može biti najviše jedna mina).

Sljedeća slika prikazuje primjer igre:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
2	1		1	0	1	1	1	0	0
3	1	1	1	0	2		3	2	1
4	1	1	2	1	3				
5					2	2	4		
6			3	1	1	0	2		
7		2	1	0	0	0	1	1	1
8		1	0	0	0	0	0	0	0
9		1	0	0	0	0	0	0	0

Predmetno područje (domenu) čine polja (1,1), $(1,2)$..., $(9,9)$ gdje prvi broj predstavlja stupac, a drugi broj redak. Opća je oznaka polja x.

a) Koristeći sljedeće predikate zapišite zadane tvrdnje u jeziku logike predikata s identitetom:

Jednomjesni predikati:
Mx: 'mina je na polju x'
N_0x, N_1x, ... N_8x, : 'na polju x nalazi se broj $0, 1, ..., 8$'
Dvomjesni predikati:
$x = y$: 'polje x jest polje y'
Sxy: 'x i y jesu susjedna polja'

1. Ako se na polju nalazi broj, onda se na njemu ne nalazi mina. ____________________

2. Ako se u polju nalazi broj 1, točno je jedna mina na susjednim poljima.

____

b) Završite igru tako da sva polja na kojima se nalaze mine zacrnite, a na preostala polja upišete odgovarajuće brojeve, ako znamo da se u zadanome minskom polju ukupno nalazi 11 mina.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
2	1		1	0	1	1	1	0	0
3	1	1	1	0	2		3	2	1
4	1	1	2	1	3				
5					2	2	4		
6			3	1	1	0	2		
7		2	1	0	0	0	1	1	1
8		1	0	0	0	0	0	0	0
9		1	0	0	0	0	0	0	0

c) Koristeći se osnovnim pravilima, navedenim pretpostavkama **i rečenicama koje ste dobili u podzadatku a)** (označite ih 'pretp.') dokažite da se na polju (2,2) nalazi mina. U opravdanjima, koja moraju biti potpuna da bi se priznavala, upotrijebite 'pretp.' za 'pretpostavka', 'u' za 'uvođenje', 'i' za 'isključenje', 'op' za 'opetovanje', veznike $\neg$, $\land$, $\lor$, $\to$, $\leftrightarrow$, konstante a, b, c te kvantifikatore '$\forall$' i '$\exists$' (npr. '$\land$u' za 'uvođenje konjunkcije' ili '$\exists$i' za isključenje egzistencijalnoga kvantifikatora).

Osim osnovnih pravila dopušteno je koristiti jedno izvedeno pravilo koje ćemo nazvati zaključkom na temelju kontradikcije (oznaka: 'ktd'), a prema njemu, ako negdje u poddokazu dođemo do kontradikcije, iz nje možemo izvesti bilo koju formulu unutar istoga poddokaza. Na primjer:

1	Fa	...
2	$\neg Fa$	...
3	$\forall x Gx$	1,2, ktd

Napomena: zadano je prvih pet redaka (dodajte retke po potrebi), a postupak je dokazivanja slobodan. Dokaz će se bodovati po dijelovima, a ukupno nosi 75 bodova.
Radi pojednostavljenja dokaza, ako se u nekome retku nalazi konjunkcija ili disjunkcija s više od dva konjunkta ili disjunkta, možete je isključiti na jednak način kao da se radi o konjunkciji ili disjunkciji s dva konjunkta ili disjunkta.

1	$N_1(1,1)$	pretp.
2	$\neg M(2,1)$	pretp.
3	$\neg M(1,2)$	pretp.
4	$\forall x(S((1,1)x) \to (x = (2,1) \lor x = (1,2) \lor x = (2,2)))$	pretp.
5	$\forall x \forall y(x = y \to (Mx \to My))$	pretp.

(28×3 boda = 84 boda)

Zadatak 7.

Koristeći se **samo osnovnim pravilima** dokažite $(\exists x Fx \vee \exists x Gx) \leftrightarrow \exists x(Fx \vee Gx)$. Opravdanja pišite u skladu s uputom u zadatku **6. b)**.

1	$\exists x Fx \vee \exists x Gx$	pretp.
2		________
3	Fa	pretp., a
4		________
5		________
6		________
7		________
8		________
9		________
10		________
11		________
12	$\exists x(Fx \vee Gx)$	1,2-6,7-11 $\vee$i
13	$\exists x(Fx \vee Gx)$	pretp.
14		________
15		________
16		________
17		________
18	Ga	pretp.
19		________
20		________
21		________
22	$\exists x Fx \vee \exists x Gx$	14,15-22, $\exists$i
23	$\exists x(Fx \vee Gx) \leftrightarrow (\exists x Fx \vee \exists x Gx)$	1-12,13-22, $\leftrightarrow$u

(16×3 boda = 48 bodova)